Formule d'inversion de φ_X

[?]
≃ Durrett (1995)

Thm : La fonction caractéristique d'une v.a. détermine sa loi.

De plus, si X est discrète, alors $\mathbb{P}(X=n) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} e^{-int}\varphi_X(t)\,dt$

si X est réelle et $\varphi_X \in L^1$, alors X admet une densité $f_X(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt}\varphi_X(t)\,dt$

Soient $T>0$, $a<b$, $K_T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$

$$x \longmapsto \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} \frac{e^{-iat}-e^{-ibt}}{it}\, e^{ixt}\,dt$$

Soit $\varphi(y) = \int_0^y \frac{\sin u}{u}\,du$ (OK car $\frac{\sin u}{u} \underset{0}{\sim} 1$).

$$K_T(x) = \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^T \frac{e^{-iat}-e^{-ibt}}{it} e^{ixt}\,dt - \int_0^T \frac{e^{iat}-e^{ibt}}{it} e^{-itx}\,dt\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^T \frac{e^{i(x-a)t}-e^{-i(x-a)t}}{it}\,dt - \int_0^T \frac{e^{i(x-b)t}-e^{-i(x-b)t}}{it}\,dt\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\int_0^T \frac{\sin((x-a)t)}{t}\,dt - \int_0^T \frac{\sin((x-b)t)}{t}\,dt\right) = \frac{\varphi(T(x-a)) - \varphi(T(x-b))}{\pi} \quad (*)$$

Or $\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du = \frac{\pi}{2}$ donc si $x \in]a,b[$, $K_T(x) \longrightarrow \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 1$.

Donc : $\lim_{T\to+\infty} K_T = \chi_{]a,b[} + \frac{\delta_a+\delta_b}{2}$.

De plus, $\int_{\mathbb{R}} K_T\,d\mathbb{P}_X = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} \frac{e^{-iat}-e^{-ibt}}{it} e^{itx}\,dt\,d\mathbb{P}_X(x) \underset{\substack{\text{Fubini}\\ \text{car mesure finie}}}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} \frac{e^{-iat}-e^{-ibt}}{it}\varphi_X(t)\,dt$

Or par convergence dominée, K_T étant bornée par $(*)$ (par $\frac{2}{\pi}\|\varphi\|_\infty$).

$$\lim_{T\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} K_T\,d\mathbb{P}_X = \int_{\mathbb{R}} \lim_{T\to+\infty} K_T\,d\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_X(]a,b[) + \frac{\mathbb{P}_X(\{a\}) + \mathbb{P}_X(\{b\})}{2} = \mathbb{P}(X\in]a,b[) + \frac{\mathbb{P}(X=a)+\mathbb{P}(X=b)}{2}$$

et $F_X(b) - F_X(a) = \mathbb{P}_X(]a,b[) + \mathbb{P}_X(\{b\})$

Donc : $F_X(b) - F_X(a) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} \frac{e^{-iat}-e^{-ibt}}{it}\varphi_X(t)\,dt - \frac{\mathbb{P}(X=a) - \mathbb{P}(X=b)}{2}$

· F_X étant croissante, l'ensemble D des points de discontinuité (i.e. atomes de X) de F_X est dénombrable. Ainsi, si $\alpha \notin D$, $\mathbb{P}(X=\alpha) = 0$. Posons $b \notin D$

$$F_X(b) = \lim_{\substack{a\to-\infty\\ a\notin D}} \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} \frac{e^{-iat}-e^{-ibt}}{it}\varphi_X(t)\,dt$$

Par continuité à droite, F_X est entièrement déterminée par ses valeurs sur $\mathbb{R}\setminus D$

Ainsi, <u>φ_X caractérise la loi de X</u> (car F_X aussi)

Soit maintenant $J_T : x \longmapsto \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} e^{-ibt}e^{itx}\,dt = \frac{1}{2T}\left[\frac{e^{i(x-b)t}}{i(x-b)}\right]_{-T}^{T} = \frac{\sin(T(x-b))}{T(x-b)}$ si $x\neq b$

et $J_T(b) = 1$.

Donc $(J_T)_T$ converge simplement vers δ_b.

De plus, $\forall T \geq 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $|J_T(x)| \leq 1$, i.e. $\|J_T\|_\infty \leq 1$, donc par cvd :

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} e^{-ibt}\varphi_X(t)\,dt \underset{\text{Fubini}}{=} \lim_{T\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} J_T\,d\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_X(\{b\}) = \mathbb{P}(X=b).$$

D'où le résultat pour une v.a.d

· Si maintenant $\varphi_X \in L^1$, la loi n'a pas d'atome car $\left|\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} e^{-ibt}\varphi_X(t)\,dt\right| \leq \frac{1}{2T}\|\varphi_X\|_1 \underset{T\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Donc par ce qui précède, $\mathbb{P}(X\in\,]a,b[) = \lim\limits_{T\to+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} \frac{e^{-iat}-e^{-ibt}}{it}\varphi_X(t)\,dt$

Or $\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-iat}-e^{-ibt}}{it}\varphi_X(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\left(\int_a^b e^{-ixt}\,dx\right)\varphi_X(t)\,dt \underset{\text{Fubini}}{=} \int_a^b\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} e^{-ixt}\varphi_X(t)\,dt\right)dx$

Donc en posant $g_T(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} e^{-ixt}\varphi_X(t)\,dt$, $\mathbb{P}(X\in\,]a,b[) = \lim\limits_{T\to+\infty}\int_a^b g_T(x)\,dx$.

Et $|g_T(x)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}|\varphi_X| \leq \frac{1}{2\pi}\|\varphi_X\|_1$ donc par cvd $\mathbb{P}(X\in\,]a,b[) = \int_a^b \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt}\varphi_X(t)\,dt\,dx$